1 Diferencijalna forma zakona elektromagnetnog polja

Integralna forma gornjih pet relacija ima taj smisao što ove relacije povezuju osnovne veličine elektromagnetnog polja koje se odnose na makroskopske – konačne elemente prostora. (makroskopske konačne veličine prostora su: L, S_L, S, υ_S.)
Međutim, elektromagnetno polje je kontinualan fizički proces, tj proces koji se odvija u svakoj tački prostora! Veličine kojima karakterišemo taj proces su vektorske funkcije. To su: $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$ i skalarna funkcija ρ. Ove veličine potpuno definišu stanje u ma kojoj tački elektromagnetnog polja, ili pak u neposrednoj okolini te tačke. Otuda proizilazi neminovno da je neophodno utvrditi vezu među ovim veličinama elektromagnetnog polja na mikroskopskom nivou, što će reći za svaku tačku u fizičkom smislu, tj za svaki fizički beskonačno mali element prostora (zapremine), kako smo ga još na početku definisali!
Ovaj prelaz sa integralne na diferencijalnu formu omogućen je dvijema fundamentalnim teoremama vektorske analize. To su Stoksova teorema i teorema Gausa-Ostrogradskog. Kao što je poznato, njihov matematički zapis glasi:

$$\oint_L \vec{a}d\vec{l} = \int_{S_L} \operatorname{rot}\vec{a}d\vec{S} \quad \text{(Stoksova teorema)} \tag{1}$$

$$\oint_S \vec{a}d\vec{S} = \int_{\upsilon_S} \operatorname{div}\vec{a}d\upsilon \quad \text{(teorema Gausa-Ostrogradskog)} \tag{2}$$

gdje je $\vec{a}$ vektorska funkcija uopšte.
Direktnom primjenom ovih teorema osnovni zakoni elektromagnetnog polja poprimaju sledeću diferencijalnu formu:

$$\int_{S_L} \operatorname{rot}\vec{H}d\vec{S} = \int_{S_L} (\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})d\vec{S} \tag{3}$$

$$\int_{S_L} \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\int_{S_L} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \tag{4}$$

$$\int_{\upsilon} \operatorname{div}\vec{B}d\upsilon = 0 \tag{5}$$

$$\int_{\upsilon} \operatorname{div}\vec{D}d\upsilon = \int_{\upsilon} \rho d\upsilon \tag{6}$$

$$\int_{\upsilon} \operatorname{div}\vec{J}d\upsilon = -\int_{\upsilon} \frac{\partial\rho}{\partial t}d\upsilon \tag{7}$$

Iz relacija (3), (4), (5), (6) i (7) slijedi neposredno:

$$1.\ \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{8}$$

$$2.\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{9}$$

$$3.\ \operatorname{div}\vec{B}=0 \tag{10}$$

$$4.\ \operatorname{div}\vec{D}=\rho \tag{11}$$

$$5.\ \operatorname{div}\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{12}$$

Pitanje: Da li su sve ove diferencijalne jednačine nezavisne?
Da bismo odgovorili na ovo pitanje primijenimo na prvu diferencijalnu jednačinu (8) operator divergencije. Pri tome treba znati da je u opštem slučaju:

$$\operatorname{div}\ (\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}\ \text{, i} \tag{13}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}=0 \tag{14}$$

Primjenjujući gornje dvije činjenice vektorske analize na prvu diferencijalnu jednačinu (8) dobijamo:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}=\operatorname{div}\vec{J}+\operatorname{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{15}$$

$$0=\operatorname{div}\vec{J}+\operatorname{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{16}$$

$$\operatorname{div}\vec{J}=-\operatorname{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{17}$$

Znači, jednačina kontinuiteta sadržana je u proširenom Amperovom zakonu. Ovo dalje znači da, s jedne strane, jednačina kontinuiteta iako manje više očigledan (pa i fundamentalan) zakon nije u <u>matematičkom</u> smislu nezavisna jednačina, i, s druge strane, uopštenje Amperovog zakona bilo je potpuno opravdano (budući da je taj zakon u skladu sa jednačinom kontinuiteta)!!
Primjenimo sada isti operator i na drugu jednačinu (9). Biće:

$$0=-\operatorname{div}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{B}\quad\Rightarrow \tag{18}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}=const. \tag{19}$$

Veličina *const*. je vremenski nepromjenljiva konstanta! A to opet znači da je bila ista i na početku uspostavljanja polja, kada je bilo $\vec{B}=0$. Dakle,

$$\operatorname{div}\vec{B}=0 \tag{20}$$

Znači, zakon o konzervaciji magnetnog fluksa implicitno je sadržan u uopštenom Faradejevom zakonu, te ni jednačina 3 nije nezavisna jednačina.
Možemo zaključiti da od navedenih <u>pet</u> jednačina samo su tri <u>nezavisne</u> i to:

$$1.\ \operatorname{rot}\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$2.\ \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

3. $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$

Uobičajeno je da se ovim jednačinama dodaje i jednačina o konzervaciji magnetnog fluksa:

4. $\operatorname{div}\vec{D} = 0$

Kako su sve tri (odnosno četiri) diferencijalne jednačine proistekle iz Maksvelovih hipoteza (postulata) to se nazivaju Maksvelovim jednačinama elektromagnetnog polja. Pošto u njima ne figurišu karakteristike sredine to ove jednačine važe za ma kakvu sredinu! U specijalnom slučaju kada se radi o linearnim, homogenim i izotropnim sredinama dodaju se i ove jednačine:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{21}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{22}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{23}$$

koje uključuju još i karakteristike ove sredine.
Na kraju, navedimo jednu vrlo važnu teoremu vektorske analize.
To je teorema Helmolca koja glasi: Jedna vektorska funkcija je jednoznačno određena (poznata) ako je određen i njen rotor i njena divergencija!

2 Izvori elektormagnetnog polja

U sprezi između izvora i elektromagnetnog polja koje izvor stvara, smatra se da izvor ima primaran karakter u tom smislu što izvor stvara polje a samo polje ne utiče povratno na izvor! S toga se u sistemu jednačina elektromagnetnog polja parametri (karakteristike) izvora uzimaju kao poznate veličine. Za nas je bitno da utvrdimo odgovarajuće veličine kojima, ne ulazeći u fizički proces koji se zbiva u izvoru, možemo prikazati ili ekvivalentirati sposobnost izvora da generiše, da stvara elektromagnetni proces.
Izvor ima sposobnost razdvajanja elektriciteta. Ta njegova sposobnost karakteriše se vrlo prosto njegovim ekvivalentnim električnim poljem ili poljem izvora. Označimo to polje sa $\vec{E}_{st}$. Stoga, u tačkama polja gdje djeluje izvor, pored električne komponente $\vec{E}$ elektromagnetnog polja treba dodati i polje izvora, tako da je u nekoj tački polja gdje djeluje i izvor, Omov zakon korektno napisan u obliku:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{st}) \tag{24}$$

Što predstavlja najopštiju formu ovog zakona!

3 Sistem jednačina elektromagnetnog polja u idealnoj dielektričnoj sredini

Sistem Maksvelovih jednačina ima opšti karakter (važi za ma kakvu sredinu).
Posmatrajmo sada slučaj idealnog, homogenog i izotropnog dielektrika da bismo utvrdili u kakvom obliku se javljaju Maksvelove jednačine.
Parametri ove sredine su:

$$\varepsilon = const \tag{25}$$

$$\mu = const \tag{26}$$

$$\sigma = const \tag{27}$$

Maksvelove jednačine se svode na oblik:

1. $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, jer je $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (za većinu realnih dielektrika) (28)

2. $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, jer je $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (za slučaj linearnih magnetnih materijala) (29)

3. $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad \Rightarrow$ (30)

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{31}$$

4. $\mathrm{div}\,\vec{B} = \mu\, \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \quad \Rightarrow$ (32)

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \tag{33}$$

Proučimo pobliže ove jednačine. U tom cilju primijenimo operator divergencije na prvu jednačinu. Dobijamo:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon\, \mathrm{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{34}$$

$0 = \varepsilon\, \mathrm{div} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, odavde slijedi (35)

$\dfrac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, kako je $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ (prema 3. jednačini) biće (36)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) = 0 \tag{37}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{38}$$

Isti rezultat se dobija i iz jednačine kontinuiteta $\mathrm{div}\,\vec{J} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ jer je $\vec{J} = \sigma \vec{E} = 0 \vec{E} = 0$.

Veličina ρ - zapreminska gustina slobodnog naelektrisanja, u opštem slučaju je funkcija i prostornih koordinata i vremena t . Gornja relacija kaže da se ρ ne mijenja u vremenu, tj da je isto u svim trenucima vremena t , pa prema tome i na početku računanja vremena $t = 0$.

Fizičko tumačenje gornje matematičke relacije bi bilo: Kad god neko slobodno naelektrisanje unesemo u neku dielektričnu sredinu (idealnu) tada ovo naelektrisanje <u>ostaje u istom rasporedu</u> u toj sredini <u>proizvoljno dugo vremena</u>!

4 Sistem jednačina elektromagnetnog polja u provodnoj sredini

Razmotrimo sada na kakav se oblik svodi Maksvelov sistem jednačina u provodnoj sredini ne naglašavajući da li se radi o dobro ili loše provodnoj sredini. Pretpostavićemo samo da se radi o homogenoj, izotropnoj provodnoj sredini. Neka su, pri tome, njene karakteristike:

$$\varepsilon = const \tag{39}$$

$$\mu = const \tag{40}$$

$$\sigma = const(\neq 0) \tag{41}$$

Kada pobudimo elektromagnetno polje unutar ovakve sredine, tada će električna komponenta ovog polja da djeluje dvojako: s jedne strane ova komponenta će prouzrokovati polarizaciju sredine (tj polarizaciju vezanog naelektrisanja), a s druge strane ista ova komponenta će da prouzrokuje i kretanje slobodnog naelektrisanja sredine. Prvo dejstvo električne komponente polja opisuje uopštena Gausova teorema u obliku:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{42}$$

dok njeno drugo dejstvo (provođenje) opisuje jednačina kontinuiteta

$$\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{43}$$

Kako je $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ uvrštavanjem u drugu relaciju i imajući u vidu prvu relaciju dobićmo:

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\rho}{\partial t} \text{ , a s obzirom na prvu relaciju} \tag{44}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\rho}{\partial t} \text{ , razdvajanjem promjenljivih biće} \tag{45}$$

$$\frac{\rho}{\partial\rho} = -\frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{1}{\partial t} \text{ , tj} \tag{46}$$

$$\frac{\partial\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\partial t \tag{47}$$

Integraljenjem lijeve i desne strane dobijamo:

$$\ln\rho + \ln C' = -\frac{\sigma}{\varepsilon}t \text{ , ili} \tag{48}$$

$$\ln\rho C' = -\frac{\sigma}{\varepsilon}t \text{ , ili} \tag{49}$$

$$\rho = \frac{1}{C'}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \tag{50}$$

$$\rho = Ce^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \qquad (51)$$

Odredimo još konstantu C. Naime, za $t = 0$ iz gornje relacije slijedi:

$$\rho = c = \rho_0 \qquad (52)$$

Te je konačno

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \qquad (53)$$

Ova relacija nam pokazuje da se gustina slobodnog naelektrisanja u provodnoj sredini mijenja u vremenu po eksponencijalnom zakonu, tj da ρ opada po eksponencijalnom zakonu! Mjera brzine opadanja je eksponent σ/ε. Količnik

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \tau \qquad (54)$$

Fizički predstavlja ono karakteristično vrijeme $t = \tau$ poslije koga je naelektrisanje ρ opalo za $e = 2,71 \approx 3$ puta! Ovo vrijeme se naziva **vrijeme relaksacije**, jer se ovaj proces opadanja, bolje reći iščezavanja elektriciteta, zove **relaksacioni proces**. Zato ovo vrijeme treba shvatiti kao vrijeme egzistiranja slobodnog naelektrisanja u provodnoj sredini, odnosno kao vrijeme "iščezavanja" naelektrisanja!
Gdje ono „iščezava"? Ako je provodna sredina beskonačna, naelektrisanje će „otići u beskonačnost". Ako je provodna sredina ograničena nekom konačnom idealnom površinom naelektrisanje će se zadržati i rasporediti po površini.
Koliko je vrijeme relaksacije za pojedine supstance?
Za idealnu dielektričnu sredinu $\sigma = 0$ te je

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{0} = \infty \qquad (55)$$

Dakle, u idealnoj dielektričnoj sredini slobodno naelektrisanje egzistira beskonačno dugo vremena, što je u skladu sa izlaganjem u prethodnom paragrafu.
Međutim, u provodnoj sredini, čije su karakteristike reda i to

$$\sigma = 10^{17}\,\Omega^{-1} \qquad (56)$$

$$\varepsilon \approx 10^{-12}\,F/m \qquad (57)$$

Vrijeme relaksacije je veličine reda

$$\tau \approx \frac{10^{-12}}{10^{7}} \approx 10^{-19}\,s \qquad (58)$$

Što je fantastično kratko vrijeme! Čak i za slabo provodne sredine, kao što je morska voda, vrijeme relaksacije je reda $10^{-10}s$!
Na kraju možemo napraviti ovakav zaključak: u provodnim sredinama vrijeme relaksacije je toliko malo da s pravom možemo smatrati da slobodno naelektrisanje u takvim sredinama ne može da egzistira, tj da je

$$\rho = 0 \qquad (59)$$

Maksvelove jednačine za provodnu sredinu poprimaju oblik:

$$1.\quad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{60}$$

$$2.\quad \mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\text{ , za većinu provodnih sredina} \tag{61}$$

$$3.\quad \mathrm{div}\,\vec{B}=0=\mathrm{div}\,\vec{H} \tag{62}$$

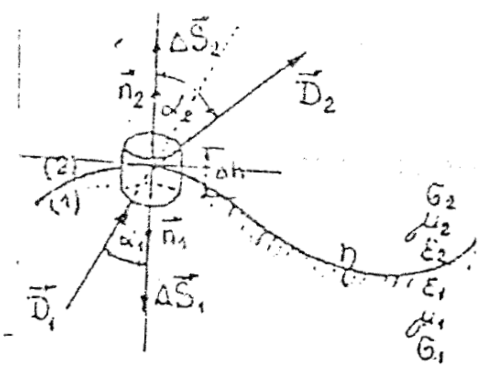
$$4.\quad \mathrm{div}\,\vec{D}=0=\mathrm{div}\,\vec{E} \tag{63}$$

Primjedba: Posmatrajući jednačinu jedan vidimo da u stvaranju magnetnog polja učestvuju obje struje, i struja provođenja i struja pomjeraja. Pitanje je koja je od ove dvije struje dominantnija. Mi ne možemo dati opštu procjenu, ali najavimo da će kod nekih sredina, kakve su metali, kondukciona struja $\vec{J}$ biti dominantna u poređenju sa strujom pomjeraja $\partial\vec{D}/\partial t$. međutim to još ne znači da tu dominantnost treba vezati samo za parametre ε i σ već i za brzinu promjene električnog polja $\partial\vec{D}/\partial t$.

5 Granični uslovi na razdvojnoj površini između dvije sredine

Kao što znamo, sistem Maksvelovih diferencijalnih jednačina, u bilo kojoj formi, potpuno opisuje elektromagnetno polje u bilo kojoj sredini i na bilo kojem mjestu (tačku). Kao vrlo čest i praktično koristan slučaj jeste ponašanje elektromagnetnog polja, odnosno njegovih komponenata, na granici između dvije različite sredine.
Naime, na granici diskontinuiteta dvije sredine svojstva sredina se skokovito mijenjaju, što uslovljava skokovitu promjenu i komponenata elektromagnetnog polja. Na koji način utvrditi zakonitost njihovih promjena?
Očigledno pomoću Maksvelovih jednačina! Ali kojih? Da li onih u integralnoj formi i onih jednačina u diferencijalnoj formi?
Za tačke na graničnoj površini ne možemo tvrditi da pripadaju jednoj ili drugoj sredini, pošto pripadaju objema! Otuda i zaključak: diferencijalna forma Maksvelovih jednačina ne može biti od koristi, jer one određuju komponente polja u jednoj tački! Zato ćemo se koristiti jednačinama u integralnoj formi.
1. slučaj. Granični uslov za vektor $\vec{D}$: neka je, najprije smjer dejstva polja iz sredine (1) ka sredini (2). Neka se, dalje, na graničnoj površini ovih sredina, u najopštijem slučaju, nalazi slobodno naelektrisanje površinske gustine η. Na graničnoj površini uočimo bilo koju tačku i ono nje postavimo zamišljeni cilindar čije su osnovice $\Delta S_1=\Delta S_2=\Delta S$ vrlo male, ali konačne veličine (!) a čija visina $\Delta h\to 0$ (!). (Dakle, ne radi se o fizički beskonačno maloj zapremini tj okolini tačke, već naprotiv konačno maloj zapremini!. To je i uslov za primjenu integralne forme Maksvelovih jednačina!)
Primijenimo sada uopštenu Gausovu teoremu:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S}=Q_{ob} \tag{64}$$



Kako visina valjka $\Delta h \to 0$ to i fluks vektora $\vec{D}$ po njegovom omotaču teži nuli, pa gornja relacija dobija oblik:

$$\int_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \eta \Delta S \tag{65}$$

Kako su površine ΔS_1 i ΔS_2 vrlo male to imamo pravo da smatramo da su vektori $\vec{D}_1$ i $\vec{D}_2$ konstantni po tako malim površinama (!), te ih možemo izvući ispred integrala:

$$\vec{D}_1 \int_{S_1} d\vec{S} + \vec{D}_2 \int_{S_2} d\vec{S} = \eta \Delta S \quad \text{, tj} \tag{66}$$

$$\vec{D}_1 \Delta \vec{S}_1 + \vec{D}_2 \Delta \vec{S}_2 = \eta \Delta S \quad \text{, ili} \tag{67}$$

$$\vec{D}_1 \Delta S \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \Delta S \vec{n}_2 = \eta \Delta S \tag{68}$$

$$\vec{D}_1 \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \vec{n}_2 = \eta \tag{69}$$

S obzirom na definiciju skalarnog proizvoda gornja relacija postaje:

$$\vec{D}_1 \cos(\pi - \alpha_1) + \vec{D}_2 \cos(\alpha_2) = \eta \tag{70}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \eta \tag{71}$$

Napomena 1. Postoji još jedna zgodna forma gornjeg izraza. Naime, ako umjesto normala $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ uvedemo zajedničku normalu, na primjer $\vec{n}$ tako da je $\vec{n} = \vec{n}_1$ a $\vec{n}_2 = -\vec{n}$, pa se granični uslov može i ovako napisati:

$$\vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} = \eta \tag{72}$$

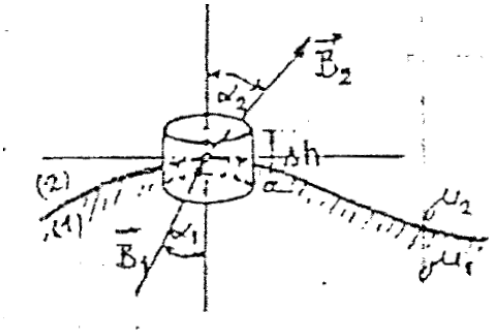
2. kada na graničnoj površini nema slobodnog naelektrisanja granični uslov se uprošćava:

$$\vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} = 0 \quad \text{, tj} \tag{73}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{74}$$

2. Slučaj: Ponašanje vektora $\vec{B}$ na graničnoj površini.

Sličnim rezonom kao u prethodnom slučaju samo primjenjujući zakon o konzervaciji magnetnog fluksa



$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \tag{75}$$

dobićemo da je

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \text{ , tj} \tag{76}$$

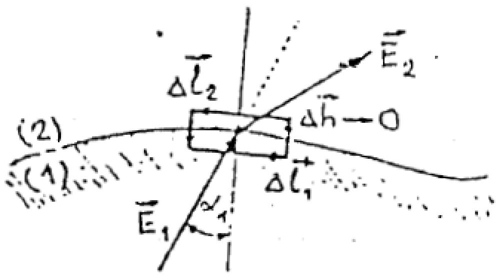
$$B_{2n} = B_{1n} \tag{77}$$

Ili pomoću zajedničke normale

$$\vec{B}_1\vec{n} - \vec{B}_2\vec{n} = 0 \tag{78}$$

Dakle, vektor $\vec{B}$ prolazi kroz graničnu površinu prelamajući se tako da su mu normalne komponente, s jedne i druge strane površine, jednake!

3. Slučaj: Ponašanje vektora $\vec{E}$ na graničnoj površini.



Oko proizvoljne tačke na graničnoj površini uočimo sada neku proizvoljnu pravougaonu konturu čije su stranice veoma male ali ipak konačne veličine! (Dakle, ne radi se o fizički beskonačno malim dužinama) Za komponente vektora $\vec{E}$ veži, kao što znamo, druga Maksvelova jednačina. (Otuda oko proizvoljne tačke uočavamo konturu a ne cilindar.) Neka su dužine stranica uočene konture takve da su stranice pravougaonika, paralelne graničnoj površini, među sobom odnose ovako:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l \text{ , (vidi sliku)} \tag{79}$$

Dok druge dvije stranice pravougaone konture Δh_1 i Δh_2 neka teže nuli! Primijenimo drugu Maksvelovu jednačinu:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{S_L} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{80}$$

Kako površina koju ograničava kontura teži nuli (jer $\Delta h \to 0$) to će i integral na desnoj strani jednačine težiti nuli! Kako, s druge strane, stranice Δl_1 i Δl_2 su vrlo male dužine iako konačne, to možemo s pravom smatrati da je vektor $\vec{E} = const$ duž svake od njih, te se može izvući ispred integrala. Najzad, cirkulacije vektora $\vec{E}$ duž stranica Δh teži nuli kad $\Delta h \to 0$. Imajući sve ovo u vidu možemo pisati:

$$\int_{\Delta l_1} \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_{\Delta l_2} \vec{E}_2 d\vec{l} = 0 \tag{81}$$

$$\vec{E}_1 \int_{\Delta l_1} d\vec{l} + \vec{E}_2 \int_{\Delta l_2} d\vec{l} = 0 \tag{82}$$

$$\vec{E}_1 \Delta\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \Delta\vec{l}_2 = 0 \tag{83}$$

$$E_1 \Delta l_1 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1) + E_2 \Delta l_2 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha_2) = 0 \tag{84}$$

$$E_1 \sin\alpha_1 + E_2(-\sin\alpha_2) = 0 \tag{85}$$

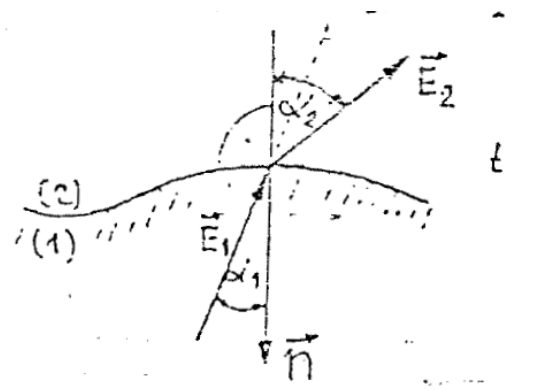
$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \tag{86}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{87}$$

Ova relacija se može napisati i u drugačijem obliku. Naime, koristeći zajedničku normalu, sa smjerom kao na slici, možemo pisati:

$$\left|\vec{n} \times \vec{E}_1\right| = E_1 \sin(\pi - \alpha_1) = E_1 \sin\alpha_1 = E_{1t} \tag{88}$$

$$\left|\vec{n} \times \vec{E}_2\right| = E_2 \sin(\pi - \alpha_2) = E_2 \sin\alpha_2 = E_{2t} \tag{89}$$

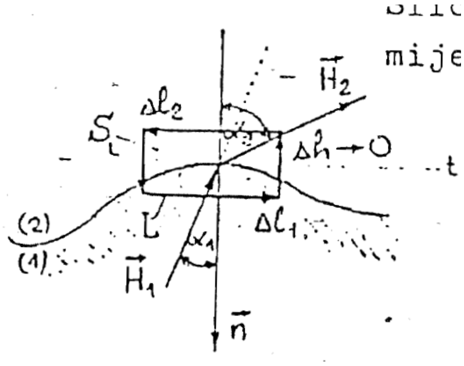


Vraćajući se na gornju pretposlednju relaciju možemo napisati granični uslov za vektor $\vec{E}$ da važi vektorska forma:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 - \vec{n} \times \vec{E}_2 = 0 \tag{90}$$

4. Slučaj: Ponašanje vektora $\vec{H}$ na graničnoj površini.

Slično prethodnom slučaju, na uočenu konturu primijenimo prvu Maksvelovu jednačinu.



dobijamo:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_L} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}\text{, odatle} \tag{91}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0 \text{ , tj} \tag{92}$$

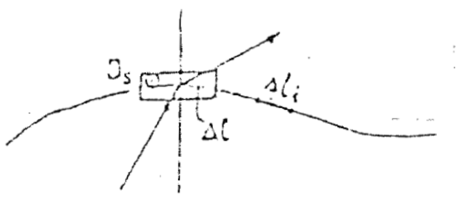
$$H_{1t} = H_{2t} \tag{93}$$

U vektorskom obliku ovaj uslov poprima formu:

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 - n \times \vec{H}_2 = 0 \tag{94}$$

Iz $\Delta h \to 0 \Rightarrow S_L \to 0$ fluks vektora $\vec{J}$ i $\vec{D}$ kroz S_L takođe teži nuli.

Napomena: Može da se desi da je struja (kondukciona) skoncentrisana na jednu veoma usku traku na graničnoj površini. Kako u tom slučaju glasi granični uslov za $\vec{H}$?



Za ovakve površinske struje cjelishodno je uvesti ne površinsku nego podužnu gustinu. Podužnu gustinu definišemo kao $\frac{di}{dl} = J_S$. Njena jedinica je $J_S = (\frac{A}{m})$.

Granični uslov sada glasi: (vidi sliku)

$$H_{1t}\Delta l - H_{2t}\Delta l = J_S \Delta l \text{ , tj} \tag{95}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S \text{ , ili} \tag{96}$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 - \vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_S \tag{97}$$

Ostali granični uslovi zadržavaju raniji (najopštiji) oblik.

6 Savršen provodnik – idealni dielektrik (Granični uslovi)

Znamo da kod savršenog provodnika $\sigma \to \infty$. Kakvi onda važe uslovi ako je $E \neq 0$?
Iz $J = \sigma E$ slijedi da i $J \to \infty$. A to znači da i Džulovi gubici, kao neizbježna pojava, takođe teži beskonačnosti! To opet bi značilo da elektromagnetno polje ima beskonačno

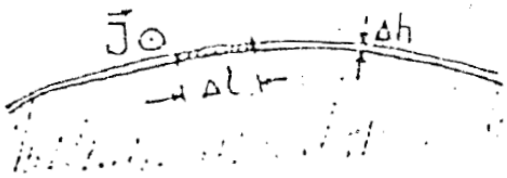
veliku energiju, što je fizički nemoguće! Pošto je, dakle, energija ovog polja konačna veličina to znači da $E \to 0$!

Zaključak: Promjenljivo električno polje ne može da egzistira u savršenom provodniku! Posledice:

$$D \to 0 \tag{98}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \to 0 \Rightarrow B \to 0 \tag{99}$$

Konstatovali smo da u savršenom provodniku ne može da egzistira elektromagnetno polje!! Međutim, da li ono egzistira, možda, na samoj površini savršenog provodnika u savršeno tankom sloju?



Uočimo na površini savršenog provodnika izvanredno tanak sloj (plašt) debljine Δh, pri čemu $\Delta h \to 0$.

Vratimo se na pojam podužne gustine struje i neka vektor $\vec{J}$ ima smjer kao na slici.

Možemo pisati:

$\Delta I = J \Delta l \Delta h$, a odatle

$$J_S = \frac{\Delta I}{\Delta l} = J \Delta h = \sigma E \Delta h \tag{101}$$

Kako je E konačno, a proizvod iz ($\sigma \to \infty$) i ($\Delta h \to 0$) daje u rezultatu konačnu vrijednost, to znači da je i J_S konačno!

Primijenimo sada granične uslove na savršen provodnik, znajući da je unutar provodnika $B_2 = 0$, $H_2 = 0$, $D_2 = 0$ i $E_2 = 0$, dobijamo:

$$\vec{D}_1 \vec{n} = \eta \text{ ili } D_n = \eta \tag{102}$$

$$\vec{B}_1 \vec{n} = 0 \text{ ili } B_n = 0 \tag{103}$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = 0 \text{ ili } E_t = 0 \tag{104}$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_S \text{ ili } H_t = J_S \tag{105}$$